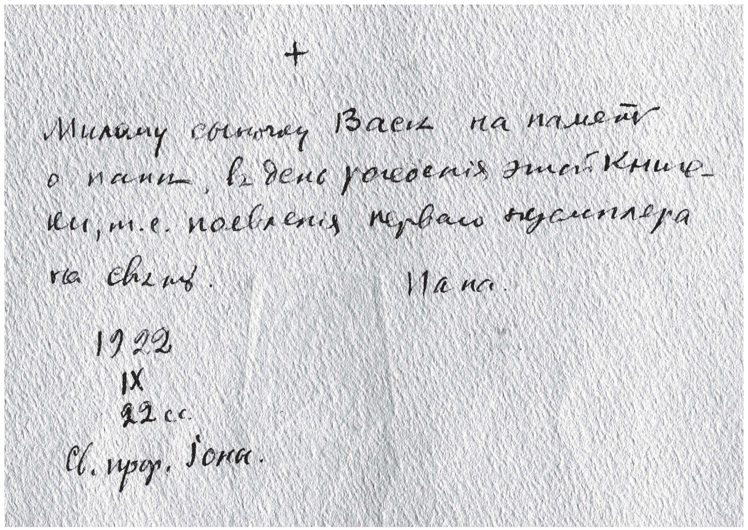
LES IMAGINAIRES EN GÉOMÉTRIE

Extension du domaine des images géométriques à deux dimensions

(*Essai d'une nouvelle concrétisation des imaginaires*)



\+

Милому сыночку Васе на память
о папе, въ день рожденія этой книж-
ки, т.е. появленія перваго экземпляра
на свѣтъ. Папа.

1922
IX
22 сс.
Св. прор. Іона.

Dédicace de Pavel Florensky à son fils à l'occasion de la première édition des *Imaginaires en géométrie* :

À mon cher fils Vassia de la part de son père, au jour de naissance de ce livre,
c'est-à-dire pour la publication du premier exemplaire.
Papa

1922
IX
22
Le Saint prophète Jonas

§1. Le présent article est un essai d'interpréter les grandeurs imaginaires sans quitter les premiers fondements de la géométrie plane analytique. Dans un des paragraphes suivants, il sera démontré que l'explication proposée s'adapte à chaque représentation à deux dimensions sur des surfaces courbes, c'est-à-dire qu'elle peut être analysée par la géométrie différentielle.

Il existe plusieurs méthodes d'approche des imaginaires. L'approche formellement arithmétique des nombres complexes à l'aide des diades de Hamilton, comme la plus abstraite, doit certainement se placer au premier plan. Ensuite vient l'introduction des opérations sur les nombres complexes, vues comme des opérations symboliques, et la représentation vectorielle qui lui est proche. C'est ensuite pour consolider plus concrètement ces deux dernières approches que doit être examinée la famille des théories, fort proches entre elles, mais pas absolument identiques, dans lesquelles le plan lui-même devient porteur des points complexes. Ces théories ont paru plus d'une fois indépendamment l'une de l'autre : les noms d'Augustin Cauchy (1821, 1847) de Gauss (1799) et du Genevois Jean-Robert Argand (1806) s'y rattachent plus particulièrement, mais l'idée d'une telle approche des imaginaires prend racine dans un passé fort éloigné et beaucoup plus vaste. Il faut mentionner en ce sens les noms du géomètre prussien Heinrich Kühn (1750), dont l'article fut accueilli dans les Notes de l'Académie des sciences de Saint-Pétersbourg, du mathématicien danois Caspar Wessel (1797), de l'abbé Buée (1806), de l'Alsacien français (1813-1815), du Français Mourey (1828), de l'Anglais John Warren (1828), de l'Italien Giusto Bellavitis, du Français Jules Hoüel (1867), du Portugais F. Gomes Teixeira (1883) et de beaucoup d'autre[1].

C'est toujours sans aucun doute *un seul* et même dessein qui passe par cette succession logique d'une suite de théories en se concrétisant peu à peu ; ce serait injuste et nuisible d'essayer de détruire l'instrument d'analyse élaboré par toute une suite d'efforts collectifs, instrument tellement utile dans l'étude des fonctions de la variable imaginaire. Mais il ne faut cependant pas oublier, en adoptant cette interprétation usuelle des imaginaires, qu'elle n'est malgré tout qu'une interprétation qui manifeste symboliquement, mais qui *n*'épuise *pas* les entités arithmétiques correspondantes. Le plan de la variable complexe n'est pas encore la variable en elle-même, il n'en est qu'une *interprétation* exprimée à l'aide du langage de l'espace, et qui, par conséquent, partage avec toutes les autres interprétations le caractère formel qui leur est à tous inhérent[2]. Toute interprétation est soumise à ce que dit Heinrich Hertz des représentations du monde : c'est un système d'images prises arbitrairement et qui correspondent avec le système interprété de telle façon que le plus grand nombre possible de conséquences des images interprétantes adoptées corresponde aux conséquences du système interprété. Nous pouvons dire d'avance que selon aucune méthode d'explication, ce parallélisme de conséquences ne peut se prolonger à l'infini : nous n'avons pas besoin de preuves pour démontrer que la traduction ne recouvre pas l'original dans tous ses détails et ses nuances. Nous sommes également convaincus de ce qu'une telle divergence, inadmissible dans les limites de la coïncidence exacte désirée, doit survenir tôt ou tard. Un symbole, quel qu'il soit, ne peut être appliqué avec succès que dans son domaine propre, mais *en-dehors* d'un certain champ visuel, il perd sa netteté et devient plus nuisible que propice à l'ouvrage. Nous savons aussi que plusieurs traductions d'une même œuvre poétique dans une ou plusieurs langues, loin de se faire obstacle se complètent au contraire, bien qu'aucune d'entre elles ne puisse remplacer totalement l'original. Les représentations scientifiques d'une même réalité peuvent et doivent également être multipliées sans que cela nuise à la vérité. Sachant cela, nous avons appris à ne pas faire de reproches à telle ou telle interprétation pour ce qu'elle ne donne pas, mais à lui savoir gré chaque fois que nous avons l'occasion de l'utiliser.

Pourtant nous sommes forcés d'indiquer les limites d'une interprétation dès que nous remarquons l'hypertrophie de telle ou telle traduction qui tente de s'identifier à l'original et de se substituer à lui, c'est-à-dire qui monopolise une certaine entité

retranchant jalousement toute autre interprétation. Il ne nous reste alors qu'à rappeler l'interprétation qui se méconnaît, sa vraie place et son domaine propre.

Tel est justement le cas du plan complexe de Kühn-Wessel-Argand-Gauss-Cauchy. Il est certes un instrument merveilleux pour représenter la variable complexe et ses fonctions, cependant insuffisant, comme le montre la nécessité d'introduire les surfaces de Riemann. Mais cette ressource répond à la définition des fonctions qui remonte à **Lejeune Dirichlet**, c'est-à-dire au moyen de la notion de la correspondance, d'ailleurs insuffisante. Car cette définition, si on ne prend en considération que **le contenu** (la « cause matérielle ») de la fonction, passe à côté de l'essentiel, à côté de la fonction elle-même comme un tout, comme **une forme** reliant ce contenu en un ensemble (la « cause formelle »). Ce n'est pas le lieu de parler ici du dommage qui a été et continue d'être occasionné par une telle définition des fonctions ; ce n'est pas non plus l'endroit de parler des tentatives faites pour passer à une autre façon de concevoir, par le développement du calcul fonctionnel, la théorie des équations intégrales et intégro-différentielles, par l'étude sur les fonctions linéaires et des équations linéaires. Mais même dans les limites de la théorie fonctionnelle, tant qu'il est question des fonctions de la variable réelle, le dommage occasionné par la définition de Dirichlet est partiellement compensé par le correctif introduit arbitrairement, qui consiste dans la forme d'une fonction représentée **intuitivement**, comme un principe supra atomistique. Je pense ici à l'interprétation du graphe des fonctions à l'aide d'une certaine *courbe*. Mais c'est quand il s'agit des fonctions de la variable complexe que l'atomicité de ladite définition paraît en toute sa force. Dans la théorie des fonctions de la variable complexe, en effet, tout le plan est occupé par une représentation de la variable indépendante. C'est pourquoi la variable dépendante est contrainte de s'établir sur un plan isolé sans aucun lien avec le premier. C'est pourquoi malgré notre affirmation que les points, sur ce second plan, représentent la variable dépendante, nous ne faisons que l'affirmer, sans démontrer quoi que ce soit : car ce qui seul pourrait montrer et démontrer cette dépendance d'une manière géométrique, *le lien* lui-même des deux variables, reste absolument non représenté géométriquement, et dans l'ordre de la géométrie, c'est-à-dire dans l'interprétation elle-même, c'est une affirmation insuffisamment fondée, totalement invérifiable, et donc géométriquement nulle. Je répète que l'interprétation reçue des imaginaires dans la théorie des fonctions de la variable complexe, n'interprète que les variables, *mais nullement les fonctions elles-mêmes* ; et dans ce sens, elle peut être admise comme une béquille, loin d'être suffisante, mais pourtant fort utile à l'analyse, justement à l'analyse et à elle seule. Quelque chose d'analogue doit être répété à propos de la sphère de Neumann. Et pourtant, à côté de l'usage de la géométrie en analyse, il existe et doit exister un usage inversé de l'analyse en géométrie, fût-ce la géométrie analytique, différentielle ou autre. Et c'est justement ici que le plan de la variable complexe ne peut *aucunement* être appliqué, parce qu'il rompt avec les méthodes établies ici, méthodes de plus fort naturelles, et n'a aucune corrélation avec elles. Et cependant les imaginaires apparaissent en géométrie non par hasard, mais sont nécessairement liés à la formulation de ses théorèmes et aux procédés de ses démonstrations, quoiqu'ils n'aient pas ici l'intuition géométrique. Dans son cours élémentaire de géométrie analytique, l'étudiant rencontre sporadiquement les imaginaires, mais n'étant pas en état de leur donner un contenu concrètement visuel, il est forcé de traiter d'une manière purement formelle des termes généralisés à l'extrême, comme par exemple le « point imaginaire », alors que c'est justement pour cette raison qu'existe la géométrie : afin que la science ne soit pas détachée de l'intuition spatiale. Bien qu'analytique, mais géométrie pourtant, la géométrie analytique se transforme à moitié en analyse et par surcroît d'une manière telle qu'elle devient toute tamisée de *lacunes* privées de sens géométrique. C'est ici qu'on rencontre à chaque pas, après une phraséologie *purement* géométrique, des ruptures du tableau géométrique. Une interprétation telle que nous la donne la géométrie analytique, nous rappelle une traduction faite du chinois à laquelle on aurait laissé plus d'une moitié de signes hiéroglyphiques non traduits, dont on n'aurait fait qu'une transcription en caractères français. On peut dire que la géométrie analytique n'est plus analytique une fois qu'elle a introduit une suite d'interprétations spatiales, et n'est pas encore la géométrie proprement dite, car elle n'a pas encore traduit tout son contenu analytique en des images géométriques. Cependant beaucoup de propositions de la géométrie analytique n'ont pas une importance essentielle prises comme analytiques, et n'ont de valeur qu'autant qu'elles sont géométriques. Ce qui est essentiel, c'est d'entrevoir leur sens spatial (et non de l'affirmer uniquement par des mots). Il est vrai que le mathématicien, accoutumé à

toutes sortes d'« ellipses imaginaires », de « points cycliques », d'« isotropes » et d'autres, n'est plus incommodé par une telle phraséologie, non parce qu'il a compris, mais seulement par la force de l'habitude. Mais cette quiétude ne peut être envisagée comme une source de développement des mathématiques. En ce sens, l'étudiant a raison de sentir quelque chose d'inachevé dans de pareilles assertions. La définition du cercle d'un rayon infiniment petit par une paire de droites imaginaires sécantes en un point réel qui est le centre de ce cercle, apparaît tout d'abord à l'étudiant comme un brillant paradoxe ; mais quand de tels concepts s'accumulent, leur ensemble commence à devenir irritant comme des bons mots trop souvent répétés.

Ainsi donc, le plan complexe de Cauchy existe en lui-même et les imaginaires, dans la géométrie analytique et dans les autres branches de la géométrie, existent en eux-mêmes. Il fait mauvais ménage avec ces imaginaires et la dite interprétation n'est pas capable d'y aider en quoi que ce soit, mais au contraire, elle ne fait que nous brouiller les idées. En effet, cette interprétation dédoublant la pensée entre le plan comme le siège des liaisons fonctionnelles, c'est-à-dire des courbes, comme cela se fait dans la géométrie analytique et dans la théorie des fonctions de la variable réelle, et le plan – porteur d'une seule *variable,* prise comme telle, hors de son lien avec les autres variables, comme le traite la théorie des fonctions de la variable complexe. Le problème se pose d'*élargir le domaine des images géométriques à deux dimensions de telle manière que les fonctions imaginaires entrent dans le système des représentations spatiales,* en prenant pour point de départ la définition du point sur le plan par deux coordonnées (ou conformément par trois coordonnées homogènes) et la perception de la courbe sur le plan comme une image démonstrative de la dépendance fonctionnelle entre les coordonnées courantes de son point et en élargissant ce domaine sans apporter ultérieurement aucune rupture dans l'exposé ordinaire de la géométrie analytique et des autres géométries. En un mot, il est indispensable de trouver dans l'espace un **lieu** pour les imaginaires, sans rien retrancher de la place déjà occupée par les images réelles.

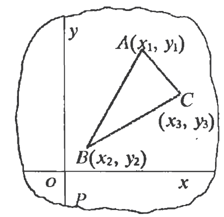
Autrement dit, il faut revenir à l'introduction formelle des nombres complexes sans prêter attention à toutes les interprétations des imaginaires et voir si les attributs formellement indispensables, c'est-à-dire constitutifs des nombres complexes, n'admettent pas une autre ligne d'interprétation que celle élaborée par l'histoire. On peut nous faire remarquer ici qu'il n'est pas désirable de rompre avec une tradition vieille de plus de cent vingt-cinq ans (5 × 25 ans). Certes, c'est indésirable, mais il est encore moins souhaitable de rompre avec une tradition comptant près de onze fois cet intervalle de temps. La découverte de Gauss et Cauchy nous a beaucoup apporté, dira-t-on probablement. Cela est vrai, mais la découverte de Descartes et la théorie de la variable réelle qui lui est proche nous ont apporté beaucoup plus. Par la force des choses, on est obligé sinon de se quereller, du moins de prendre ses distances avec l'un d'eux, car ils ne sont pas d'accord. Et s'il en est ainsi, ne vaut-il pas mieux, vu Descartes et la cohérence géométrique, sacrifier notre loyauté exclusive envers Cauchy ?

§ 2. Tournons-nous donc vers la théorie formelle des complexes. Ils sont introduits ici par les symboles de Hamilton (a, b) approfondis par Weierstrass[3]. Leur caractéristique la plus fondamentale et la plus constitutive est indubitablement la dualité. Les complexes forment une multiplicité double. Cette dualité de leur constitution est adoptée par l'interprétation ordinaire à l'extension *binaire* du plan des coordonnées. Mais nous n'avons pas à entreprendre une telle démarche, car l'extension binaire du plan a déjà été utilisée pour l'interprétation des dépendances fonctionnelles et ce serait enfreindre le *jus primi occupantis* de Descartes, que de recourir de nouveau à la même propriété du plan. Il nous semble pourtant que Descartes et Cauchy font une même erreur méthodologique, qui malgré son peu d'importance apparent, a entraîné une quantité d'inconvénients logiques et pratiques. Cette erreur consiste en un mauvais choix de l'unité de mesure fondamentale. En réalité, qu'étudions-nous en géométrie ? C'est **l'espace** que nous étudions, non les lignes, les points et les surfaces par elles-mêmes, mais justement **les propriétés de l'espace**, qui se manifestent aussi par ces images particulières, formées dans l'espace. Or nous ne devons pas prendre pour unité de mesure une grandeur de même nature que l'objet étudié, mais une grandeur homogène, une portion de l'espace lui-même. Dans le système absolu des mesures, la seconde est un segment du temps lui-même, comme d'une réalité principale. Pourquoi donc, comme support de l'espace, ne prenons-nous pas comme principe une portion de l'espace lui-même ? Tout comme *en géométrie plane, c'est le plan qu'on étudie, (ou la surface en général) ; c'est le plan qui est son objet, tandis*

que les lignes et les points sur lui ne sont que des formations particulières, et c'est pourquoi en géométrie, sur le plan, nous devons justement prendre pour unité de mesure une portion du plan lui-même, tandis que l'unité linéaire doit être envisagée en qualité d'unité dérivée. Il est naturel, en étudiant n'importe quel objet, de choisir pour le mesurer l'unité principale qui soit homogène à la grandeur mesurée et ce n'est que plus tard que l'on peut inventer des unités secondaires et hétérogènes à l'unité fondamentale, mais qui peuvent en un certain sens être plus commodes au point de vue pratique. Telle est la démarche et la négliger mène à diverses implications.

Pour donner un caractère plus concret à notre raisonnement, procédons avec des exemples très simples.

Soit un triangle donné sur le plan [FIG. 1].



[FIG. 1]

Les coordonnées cartésiennes des sommets de ce triangle sont

$$A(x_1, y_1),\ B(x_2, y_2),\ C(x_3, y_3)\,. \qquad [1]$$

son aire est, comme on le sait, le déterminant

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix}$$

mais ses sommets, du point de vue logique, sont complètement symétriques entre eux. C'est pourquoi nous devons, apparemment, obtenir le même résultat si le sommet B devient le sommet C et vice-versa. Alors, l'aire change de signe sans changer de grandeur absolue

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix}\,. \qquad [2]$$